Travaux dirigés de Mathématiques

1ère année

Année 2024-2025

Arnaud LE PADELLEC alepadellec@irap.omp.eu

P r é s e n t a t i o n

Tous les exercices d'acoustique qui seront abordés en Travaux Dirigés cette année sont regroupés dans ce fascicule. Il est demandé aux étudiants de préparer la séance de travaux dirigés.

Thème 1 : Vecteurs, nombres complexes, matrices, fonctions numériques d'une variable réelle

Exercice 1 : produit scalaire et coordonnées
Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$). Dans chacun des cas suivants, déterminer $\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{v}$. *Les vecteurs sont représentés en caractères gras en conformité avec les usages internationaux.*

1. $\boldsymbol{u}$ (3, -2) et $\boldsymbol{v}$ (5, 7),
2. $\boldsymbol{u}$ (1/2, $\sqrt{3}/2$) et $\boldsymbol{v}$ ($-\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$),
3. $\boldsymbol{u}$ (m+1, m-5) et $\boldsymbol{v}$ (2-m, m+4) avec $m \in \mathrm{R}$.

Exercice 2 : vecteurs orthogonaux
Dans chacun des cas suivants, déterminer la ou les valeurs de x pour que les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ soient orthogonaux.

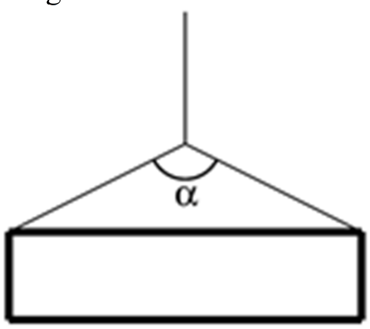
1. $\boldsymbol{u}$ (1, 3) et $\boldsymbol{v}$ (6, x+1),
2. $\boldsymbol{u}$ (2x-1, 2) et $\boldsymbol{v}$ (3x+2, x+1),

Exercice 3 : repère et vecteurs coplanaires
Déterminer a et b pour que $\boldsymbol{u}$ (2, a, 5) et $\boldsymbol{v}$ (1, -2, b) soient colinéaires.

Exercice 4 : repère et vecteurs coplanaires
On considère les points A (2, 1, 0), B (0, 1, 1) et C (0, 3, 2) ainsi que le vecteur $\boldsymbol{k}$ (0, 0, 1).

1. Démontrer que A, B et C ne sont pas alignés.
2. Les vecteurs $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ et $\boldsymbol{k}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.
3. La droite passant par O et de vecteur directeur $\boldsymbol{k}$ coupe le plan (ABC) en un point I. Déterminer ses coordonnées.

Exercice 5 : élingage
On attache une charge de masse m = 50 kg par deux câbles reliés de manière à faire un angle α entre eux, puis on suspend le tout par un autre câble. On suppose que chaque câble, individuellement, supporte une masse de 50 kg. Le montage est-il solide ?



Exercice 6 : champ magnétique
Une particule de charge q et de masse m est soumise à un champ magnétique constant $\boldsymbol{B}$ (0, 0, B). Elle subit alors la force de Lorentz $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$, et son mouvement est décrit par l'équation $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$; $\boldsymbol{v}$ désigne la vitesse de la particule et $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v} / \mathrm{d}t$ son accélération.

Ecrire en fonction des coordonnées (v_x, v_y, v_z) de $\boldsymbol{v}$ les équations correspondantes. Les résoudre. A quoi ressemble la trajectoire de la particule ?

Exercice 7 : nombres complexes

1. Donner la forme cartésienne puis le module et l'argument des nombres :

$$\sqrt{3} - j$$

$$(1 - j)(1 + 3j)$$

$$(1 + j\sqrt{2})^3$$

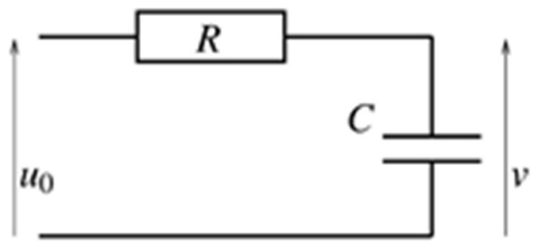
$$(1 + j) / (2 - j).$$

2. On considère si $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ la fonction $f(x) = (1 + j \tan x) / (1 - j \tan x)$. Donner les parties réelle et imaginaire, le module, l'argument de $f(x)$. En déduire l'expression de $\cos(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.

3. Calculer $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

Exercice 8 : nombres complexes

Un courant d'intensité i traverse le circuit suivant :



Connaissant R, C et u_0, on cherche i et v, qui sont liées par la relation $i = C\, dv / dt$.

1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la tension $v(t)$.

2. Si u_0 est une constante U_0, déterminer v.

3. Si u_0 est sinusoïdale, donnée sous forme complexe par $\underline{u}_0(t) = Ae^{j\omega t}$, alors on admet que $v(t)$ est de la forme $Be^{j(\omega t + \varphi)}$. Donner une relation entre B, φ et R, C, A, ω.

4. Calculer φ si $RC\omega = 3$.

Exercice 9 : fonctions périodiques

$u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ représente la tension aux bornes d'une prise de courant ; ω est appelé pulsation, A amplitude ou tension maximale.

1. Montrer que u est périodique. Calculer en fonction de ω sa période et sa fréquence, l'inverse de la période.

2. La tension efficace correspondant à une tension variable de période T est donnée par

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt.$$

Calculer U_{eff} en fonction de A et ω.

3. Sachant qu'en France la fréquence du courant est de 50 Hz et la tension efficace de 220 V, déterminer A et ω.

4. De plus, on suppose que $\varphi = \pi/4$. Représenter graphiquement U.

5. Calculer du/dt et d^2u/dt^2. En déduire que u est une solution de l'équation différentielle $\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=0$.

6. Déterminer la primitive de U qui s'annule en 0.

Exercice 10 : dérivation

Calculer la dérivée des fonctions définies par :

$$a(x) = -(2x-3)^4,$$

$$b(t) = A\cos(\omega t+\varphi),$$

$$c(x) = x\ln(x+2),$$

$$d(x) = x/\sqrt{x^2+1},$$

$$e(x) = \arccos x,$$

Thème 2 : Primitives et intégrales

Exercice 11 : calcul par utilisation de primitives connues

$$A=\int_0^1 \sqrt{3x}\,dx,$$

$$B=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx,$$

$$C=\int_1^8 \frac{1}{V^\gamma}dV \quad (\gamma>0).$$

Exercice 12 : intégrations par changements de variables

$$A=\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta,$$

$$B=\int_0^x \frac{1}{2t^2+1}dt,$$

$$C=\int_0^1 x^3e^{x^2}dx,$$

Exercice 13 : intégrations par parties

$$A=\int_1^X \ln x\,dx,$$

$$B=\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx,$$

$$C = \int_0^1 x^2 e^x dx,$$

$$D = \int_0^{\pi/2} \left(3x^3 - 2x\right)\cos x dx,$$

Thème 3 : Equations différentielles

Exercice 14

Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

$$y'' = \omega^2 y,$$

$$y'' + \omega^2 y = 1,$$

$$2y'' + 3y' - 2y = 0,$$

$$y'' - 2y' + 10y = 5,$$

$$y'' + 2y' + 5y = 5\cos x,$$

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-2x},$$

$$y'' + 2y' + y = 2.$$

Exercice 15 : circuit électrique *LR* série

Le courant $i(t)$ qui circule dans un circuit *LR* soumis à une tension $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$ vérifie l'équation différentielle $Ldi / dt + Ri = U_0 \sin \omega t$. Déterminer i si $i(0) = 0$.

Exercice 16 : parachute

Un parachutiste est freiné par la résistance de l'air, proportionnelle au carré de sa vitesse. On note $k = 30$ Nm^{-2}s^2 ce coefficient de proportionnalité, et $m = 80$ kg la masse du parachutiste.

1. Montrer que l'équation différentielle dont la vitesse v est solution est $v' = -kv^2/\mathrm{m} + g$.
2. Résoudre l'équation du mouvement si la vitesse initiale est de $v(0) = 200$ km h^{-1}, vitesse "limite" atteint lors de la chute libre.
3. Quelle est la vitesse limite du mouvement ?
4. Au bout de combien de temps la vitesse devient-elle inférieure à la vitesse de 20 km h^{-1} ?